TENTAMEN DISCRETE STRUCTUREN

10-4-2012

□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□

Alleen als je cijfer voor de deeltoets minimaal een 6 was geeft dit vrijstelling voor Deel 1 van dit tentamen (afleggen van Deel 1 is altijd toegestaan).

Voorzie de in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal te behalen punten vermeld. ***Antwoorden dienen altijd van een motivatie te worden voorzien.*** *Succes!*

Deel 1

Opgave 1. (10 pt) Gegeven is een universele verzameling U.

a. Gebruik de verzamelingenalgebra om te bewijzen dat voor elk drietal deelverzamelingen A, B, C van U geldt: $((A \cap C) \cup \overline{(\overline{B} \cup C)}) \cup ((B \cap C) \cup (A \cap \overline{C})) = A \cup B$. Benoem de gebruikte regels.

b. Gegeven is de verzameling $A = \{a\}$. Geef alle elementen van de machtsverzameling $P(A)$, en ook van de machtsverzameling $P(P(A))$.

Opgave 2. (10 pt) Bewijs met volledige inductie dat $7^n - 1$ deelbaar is door 6 voor alle gehele getallen $n \geqslant 1$.

Opgave 3. (10 pt) Los de volgende recurrente betrekking op: $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_1 = 1, a_2 = 5, n \in \mathbb{Z}^+$.

Opgave 4. (10 pt) Gegeven is het alfabet $\Sigma = \{A, C, T, G\}$ (het "DNA alfabet"). Elke string $s = s_1\, s_2 \ldots s_n$ van lengte n over dit alfabet heeft een complementaire string $\overline{s} = \overline{s}_1\, \overline{s}_2 \ldots \overline{s}_n$ van lengte n, waarbij, voor $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\overline{s}_i = \begin{cases} C & \text{als } s_i = G \\ G & \text{als } s_i = C \\ T & \text{als } s_i = A \\ A & \text{als } s_i = T \end{cases}$$

Bijvoorbeeld, de string $A\,C\,C\,T\,G$ heeft als complementaire string $T\,G\,G\,A\,C$.
Laat A_n de verzameling van alle strings van (vaste) lengte n over het alfabet Σ zijn.
Definieer de functie $f : A_n \to A_n$ als $f(s) = \overline{s}$. Bewijs dat f zowel injectief als surjectief is.

Opgave 5. (10 pt) R en S zijn relaties op de verzameling $A = \{1, 2, 3\}$, gedefinieerd als

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (1,3)\}, \quad S = \{(2,1), (3,2), (3,1)\}.$$

a. Teken de grafen van R en S.

b. Geef de matrix $\mathbf{M}_R$ behorende bij de relatie R en ook de matrix $\mathbf{M}_{R^2}$ behorende bij de relatie R^2.

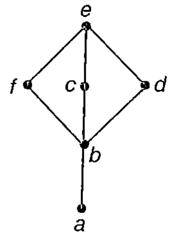
c. Is de relatie R een partiële ordening ? Zo ja, teken het Hasse diagram van R. Zelfde vraag voor de relatie S.

d. De relatie $R \cup S$ is een equivalentierelatie. Geef aan waarom. Hoeveel equivalentieklassen zijn er?

(Deel 2 op de volgende pagina)

Deel 2

Opgave 6. (10 pt)



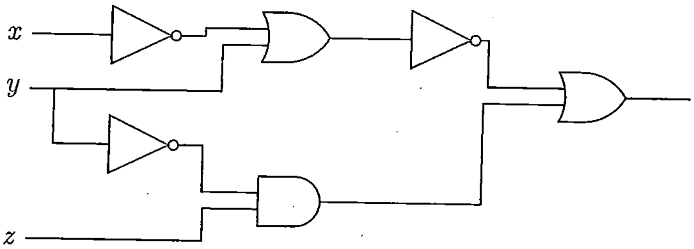
In de figuur hiernaast is het Hasse diagram van een partiële ordening $\leq$ op $L = \{a, b, c, d, e, f\}$ weergegeven.

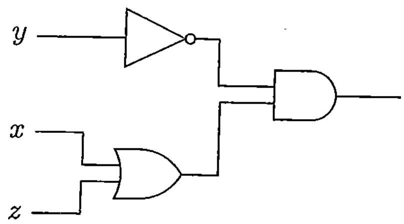
a. L is een tralie. Leg uit wat we met deze uitspraak bedoelen.

b. Geef alle maximale, minimale, grootste en kleinste elementen van L.

c. Bepaal $f \vee (c \wedge d)$ en ook $(f \vee c) \wedge (f \vee d)$. Wat concludeer je hieruit?

Opgave 7. (10 pt)





a. Bepaal de Boolese expressies $f_1(x, y, z)$ en $f_2(x, y, z)$ voor de twee logische diagrammen (respectievelijk links en rechts) in de figuur hierboven, en laat zien dat deze expressies equivalent zijn.

b. Geef de waarheidstabel die correspondeert met de Boolese functies $f_1 : B_3 \to B$ en $f_2 : B_3 \to B$.

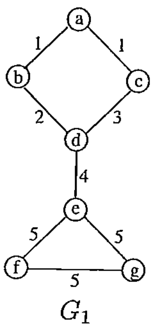
Opgave 8. (10 pt)

Gegeven zijn een ongerichte samenhangende graaf G en een ongerichte boom T, die geen gemeenschappelijke knopen hebben. Verbind nu de graaf G en de boom T door een kant $\{g, t\}$, waarbij g een knoop van G is en t een knoop van T. De zo ontstane graaf noemen we G'.

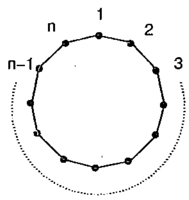
a. De graaf G' heeft altijd een opspannende boom. Leg uit waarom.

b. Bewijs dat de kant $\{g, t\}$ deel uitmaakt van elke opspannende boom van de graaf G'.

Opgave 9. (10 pt)



G_1



P_n

Bekijk de gewogen ongerichte graaf G_1 in de figuur hierboven (links); de geheeltallige gewichten van de kanten zijn aangegeven.

a. Bepaal alle minimale opspannende bomen van de graaf G_1, teken deze, en geef het bijbehorende gewicht.

b. Bekijk een enkelvoudig gesloten veelhoek (polygon) P_n met n knopen ($n \geqslant 3$), zie de figuur hierboven (rechts). Neem aan dat alle kanten hetzelfde gewicht hebben. Hoeveel verschillende minimale opspannende bomen heeft P_n (als functie van n)?

Opgave 10. (10 pt) Bekijk nogmaals de grafen G_1 en P_n uit de figuur van opgave 9.

a. Welke van deze grafen hebben een Euler circuit? En een Euler pad? Verklaar je antwoorden.

b. Stel een ongerichte graaf G heeft een Euler pad, maar geen Euler circuit. Geef het minimale aantal kanten dat moet worden toegevoegd aan G zodat de resulterende graaf een Euler circuit heeft. Motiveer je antwoord.

c. Geef een correcte ("proper") kleuring van de grafen G_1 en P_n met een minimaal aantal kleuren.